

$$M_{\max} = \frac{2}{3} pl^2 \quad T_{\max} = \frac{2}{3} pl \quad N_{\max} = 0$$

Moment bezwładności wyższego rzędu, potrzebny do dalszych obliczeń wyznaczmy ze wzoru

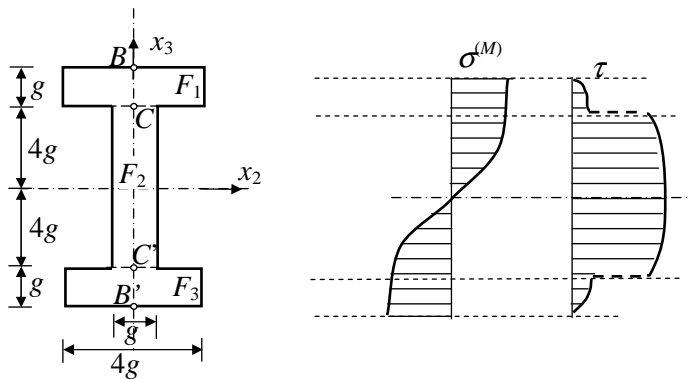
$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF$$

Obszar F jest sumą trzech podobszarów – środka i półek

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

stąd możemy skorzystać z zależności

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF = \int_{F_1} x_3^{N+1} dF_1 + \int_{F_2} x_3^{N+1} dF_2 + \int_{F_3} x_3^{N+1} dF_3$$



Rys. 7.3c

Wówczas

$$\int_{F_1} x_3^{N+1} dF = 4g \int_{4g}^{5g} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{4g}{N+2} [x_3^{N+2}]_{4g}^{5g} = \frac{4g^{N+3}}{N+2} (5^{N+2} - 4^{N+2})$$

$$\int_{F_2} x_3^{N+1} dF = g \int_{-4g}^{4g} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{g}{N+2} [x_3^{N+2}]_{-4g}^{4g} = \frac{g^{N+3}}{N+2} [4^{N+2} - (-4)^{N+2}]$$

$$\int_{F_3} x_3^{N+1} dF = 4g \int_{-5g}^{-4g} x_3^{N+1} dx_3 = \sqrt{\frac{4g}{N+2}} [x_3^{N+2}]_{-5g}^{-4g} = ((-4)^{N+2} - (-5)^{N+2})$$

A zatem

$$\begin{aligned} J(N+1) &= \frac{4g^{N+3}}{N+2} (5^{N+2} - 4^{N+2}) + \frac{g^{N+3}}{N+2} [4^{N+2} - (-4)^{N+2}] + \\ &+ \frac{4g^{N+3}}{N+2} [(-4)^{N+2} - (-5)^{N+2}] = \\ &= \frac{g^{N+3}}{N+2} [4 \cdot 5^{N+2} - 4 \cdot 4^{N+2} + 4^{N+2} - (-4)^{N+2} + 4 \cdot (-4)^{N+2} - 4 \cdot (-5)^{N+2}] = \\ &= J(N+1) = \frac{g^{N+3}}{N+2} [1 - (-1)^{N+2}] (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2}) \end{aligned}$$

Do obliczenia wymiaru g potrzebne będą nam wartości naprężeń normalnych i stycznych w najbardziej niewralgicznym punkcie przekroju.

Jest nim punkt C (punktu C' nie rozpatrujemy ze względu na symetrię przekroju i wykresów naprężeń) – miejsce styku środka i pasów.

Dla punktu C wyliczamy wielkości naprężeń normalnych od działania momentu zginającego oraz naprężeń tnących, korzystając ze wzorów dla materiału nieliniowo – sprężystego ($\sigma = A\varepsilon^N$).

Naprężenia normalne wyznaczymy z zależności

$$\sigma_{11} = \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

$$x_3 = 4g$$

$$\sigma_{11} = \frac{\frac{2}{3} pl^2 (N+2) 4^N \cdot g^N}{g^{N+3} (1 - (-1)^{N+2}) (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})} = \frac{2^{2N+1} (N+2) pl^2}{3g^3 (1 - (-1)^{N+2}) (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})}$$

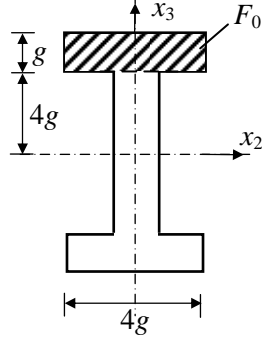
Naprężenia styczne σ_{13} obliczymy ze wzoru

$$\sigma_{13} = \frac{T_{\max} \cdot S_N}{d \cdot J(N+1)}$$

gdzie $S_N = \int_{F_0} x_s^N dF$ - moment statyczny rzędu N części przekroju F_0 ponad

analizowanym punktem, $d = g$ - szerokość przekroju.

W naszym przypadku moment statyczny S_N pola F_0 (rys. 7.3d) wyniesie



Rys. 7.3d

$$S_N = 4g \int_{4g}^{5g} x_3^N dx_3 = \frac{4g}{(N+1)} [x_3^{N+1}]_{4g}^{5g} = \frac{4g^{N+2}}{N+1} (5^{N+1} - 4^{N+1})$$

Wykorzystując powyższe zależności otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{\frac{2}{3} pl \cdot 4g^{N+2} (5^{N+1} - 4^{N+1}) (N+2)}{g^{N+4} (N+1) (1 - (-1)^{N+2}) (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})} = \\ &= \frac{8pl (5^{N+1} - 4^{N+1}) (N+2)}{3g^2 \cdot (N+1) (1 - (-1)^{N+2}) (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})} \end{aligned}$$

Aby zaprojektować przekrój tzn. znaleźć wymiar g , należy skorzystać z jednej z hipotez wytrzymałościowych. Korzystamy tu z hipotezy H-M-H. Wzór na naprężenie zredukowane dla płaskiego stanu naprężeń ma postać (łącznie z warunkiem na projektowanie)

$$\sigma_{zred.} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2} \leq \sigma_0$$

W naszym zadaniu poszukiwaną wartość g wyliczymy z równania

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

$$\frac{2^{4N+2}(N+2)^2 p^2 l^4}{9 \cdot g^6 (1 - (-1)^{N+2})^2 (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})^2} + \frac{192 p^2 l^2 (5^{N+1} - 4^{N+1})^2 (N+2)^2}{9 \cdot g^4 (N+1)^2 (1 - (-1)^{N+2})^2 (4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})^2} - \sigma_0^2 = 0$$

Dodatni pierwiastek powyższego równania jest poszukiwaną wartością wymiaru g .

Aby rozwiązać to równanie sprowadzimy je do postaci

$$\alpha^2 \frac{1}{g^6} + 3\beta^2 \frac{1}{g^4} - \sigma_0^2 = 0 / \cdot g^6$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 g^2 - \sigma_0^2 g^6 = 0$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2^{2N+1}(N+2)pl^2}{3(1 - (-1)^{N+2})(4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})}$$

$$\beta = \frac{8pl(5^{N+1} - 4^{N+1})(N+2)}{3(N+1)(1 - (-1)^{N+2})(4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})}$$

Stosując podstawienie $g^2 = t$ otrzymamy

$$\alpha^2 + 3\beta^2 t - \sigma_0^2 t^3 = 0 / \cdot (-1)$$

$$\sigma_0^2 t^3 - 3\beta^2 t - \alpha^2 = 0$$

Jest to równanie stopnia 3 typu

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0$$

Dzieląc równanie przez a i podstawiając

$$t = y - \frac{b}{3a}$$

otrzymamy

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \text{gdzie} \quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

W naszym przypadku

$$\left. \begin{aligned} a &= \sigma_{pl}^2 \\ b &= 0 \\ c &= -3\beta^2 \\ d &= -\alpha^2 \end{aligned} \right\}$$

a zatem

$$t = y \quad \text{oraz} \quad 3p = -\frac{3\beta^2}{\sigma_0^2}; \quad 2q = -\frac{\alpha^2}{\sigma_0^2}$$

Jest to równanie postaci

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{\beta^2}{\sigma_0^2} \quad q = -\frac{\alpha^2}{2\sigma_0^2}$$

Wyprowadzamy zmienną pomocniczą $r = \eta\sqrt{|p|}$, gdzie η oznacza (+1) lub (-1), zgodnie ze znakiem q . U nas $q < 0$, toteż $\eta = -1$

$$r = -\sqrt{\left| -\frac{\beta^2}{\sigma_0^2} \right|} = -\frac{\beta}{\sigma_0}$$

W analizowanym równaniu ilość pierwiastków rzeczywistych zależy od znaku wyróżnika $D = q^2 + p^3$ oraz znaku p

$$D = \frac{\alpha^4}{4\sigma_0^4} - \frac{\beta^6}{\sigma_0^6} \quad \text{zaś} \quad p < 0$$

Wówczas możliwe są dwa typy rozwiązań

a) Gdy $D = \frac{\alpha^4\sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} \leq 0$ i $p < 0$ wtedy istnieją 3 pierwiastki rzeczywiste

$$\left. \begin{aligned} t_1 = y_1 &= -2r \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_2 = y_2 &= 2r \cos\left(60^\circ - \frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_3 = y_3 &= 2r \cos\left(60^\circ + \frac{1}{3}\varphi\right) \end{aligned} \right\}$$

gdzie

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q}{r^3}\right) = \arccos\left(\frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}\right)$$

b) Gdy $D = \frac{\alpha^4 \sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} > 0$ i $p < 0$ wtedy istnieje jeden pierwiastek

rzeczywisty

$$t_1 = -2r \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi\right)$$

gdzie

$$\cosh \varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}$$

W rozwiązaniach praktycznych spotykamy się z drugim wariantem, tzn. gdy $D > 0$ i $p < 0$, w którym istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

Poszukiwaną wartość g wyliczymy ze wzoru

$$g = \sqrt{t}, \quad \text{gdzie } t > 0$$

W podanym rozwiązaniu nie uwzględniono naprężeń normalnych od siły osiowej, ponieważ nie występuje ona w analizowanym przekroju. W celu dokładnego wyznaczenia wymiaru g należałoby przeprowadzić obliczenia dla drugiej kombinacji sił wewnętrznych odpowiadającej przekrojowi ze strony prawej naroża 2

$$M_{\max} = \frac{2}{3}pl^2, \quad T_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3}pl, \quad N_{\max} = -\frac{\sqrt{2}}{3}pl.$$

Wtedy naprężenie normalne byłoby sumą naprężeń normalnych od działania siły osiowej i momentu zginającego.

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)} = \frac{N_{\max}}{F} + \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

gdzie $F = 24g \cdot g + 8g \cdot g = 16g^2$ - pole przekroju

Wówczas warunek na poszukiwany wymiar g przyjmie postać

$$(\sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)}) + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

Stąd dla rozpatrywanego przekroju 2 otrzymamy równanie

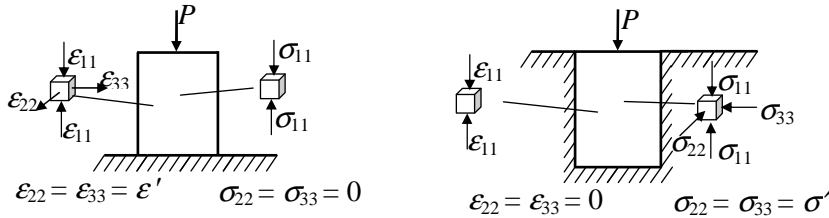
$$\left[\frac{2^{2N+1}(N+2)pl^2}{3g^3(1-(-1)^{N+2})(4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})} + \frac{\sqrt{2}pl}{48g^2} \right] + \frac{96p^2l^2(5^{N+1} - 4^{N+1})^2(N+2)^2}{9g^4(N+1)^2(1-(-1)^{N+2})^2(4 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2})} - \sigma_0^2 = 0$$

Pierwiastek tego równania jest poszukiwaną, dokładną wartością wymiaru g .

ZADANIE 7.4.

Należy porównać wyężenie w pręcie przedstawionym na rys. 7.4 w dwóch przypadkach:

- pręt jest ściskany swobodnie,
- pręt umieszczono w sztywnym gnieździe



Rys. 7.4

Dane: F , P , u , E i σ_0 – napężenie dopuszczalne

Rozwiązanie:

W przypadku a) swobodne ściskanie prowadzi do jednoosiowego stanu naprężeń $\sigma_{11} = \frac{P}{F} < \sigma_0$.

W przypadku b) należy najpierw określić poprzeczne napężenie ściskające σ' powstałe w wyniku braku możliwości swobodnego przemieszczania się pobocznic pręta po umieszczeniu go w sztywnym gnieździe. Napężenie to wyliczymy w warunku znikania odkształceń poprzecznych

$$\epsilon' = \frac{1}{E}[\sigma' - \nu(\sigma_{11} + \sigma')] = 0 \rightarrow \sigma' = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{11}$$

Stosując hipotezę H–M–H otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma')^2 + (\sigma_{11} - \sigma')^2} \leq \sigma_0 \rightarrow (\sigma_{11} - \sigma') \leq \sigma_0$$

$$(1 - \frac{\nu}{1 - \nu}) \sigma_{11} \leq \sigma_0 \quad \text{lub} \quad \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \sigma_{11} \leq \sigma_0$$

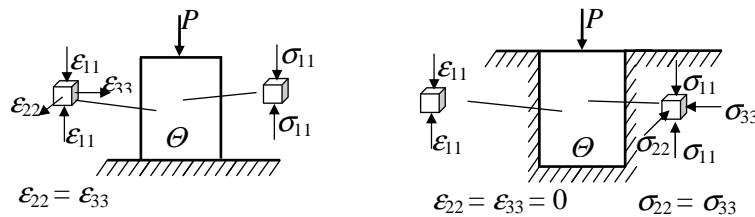
Z porównania tego wyniku, iż ta sama siła ściskająca pręt wywołuje w nim różne wyężenie materiału, mniejsze w przypadku ściskania swobodnego a większe przy ściskaniu pręta w nieodkształcalnym gnieździe.

ZADANIE 7.5.

Należy porównać stan wyężenia w prostopadłościowej ściskanej siłą osiową P pryzmie w dwóch przypadkach:

- swobodnego ściskania,
- pryzma znajduje się w nieodkształcalnym gnieździe.

Pryzma poddana jest dodatkowo działaniu przyrostu temperatury $\theta = T - T_0$ gdzie T_0 jest temperaturą początkową, a T aktualną. Problem przeanalizować należy w zakresie sprężystym i lepkosprężystym.



Rys. 7.5

Dane: P , θ , ν , E i σ_0 – napężenie dopuszczalne

Rozwiązanie:

W przypadku a) swobodne ściskanie prowadzi do jednoosiowego stanu naprężen

$$\sigma_{11} = \frac{P}{F} \leq \sigma_0$$

a zmiany temperatur wywołują w tym przypadku jedynie swobodne odkształcenia.

W przypadku b) należy najpierw określić stan odkształceń ciała, traktowanego jako ośrodek liniowo sprężysty

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] + \alpha_T \theta$$

α_T – współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Z warunku nieodkształcalności gniazda $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ i równości naprężeń $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ wynika

$$\sigma_{22}(1-\nu) - \nu\sigma_{11} + E\alpha_T\theta = 0 \rightarrow \sigma_{22} = \frac{1}{1-\nu}(\nu\sigma_{11} - E\alpha_T\theta)$$

Mamy w tym przypadku trójosiowy stan naprężeń którego wytyżenie wg hipotezy H–M–H wynosi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2[\sigma_{11} - \frac{1}{1-\nu}(\nu\sigma_{11} - E\alpha_T\theta)]^2} \leq \sigma_0 \rightarrow \frac{1-2\nu}{1-\nu}\sigma_{11} + \frac{E}{1-\nu}\alpha_T\theta \leq \sigma_0$$

Z porównania obu rezultatów wynika, iż nieswobodne ściskanie pręta łącznie z działaniem dodatnich przyrostów temperatury powoduje w pryzmie większe wytyżenie materiałów niż w przypadku ściskania swobodnego.

W zadaniu lepkosprężystym przy ścisaniu swobodnym stan wytyżenia wynosi $\sigma_{11} \leq \sigma_0$, natomiast przy nieswobodnym warunek niedokształcalności ścianek gniazda $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ i równości naprężeń $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ prowadzi do zależności

$$\varepsilon_{22} = C * [d\sigma_{22} - \nu(d\sigma_{22} + d\sigma_{11})] + \alpha_T \theta$$

$$\text{stąd } \sigma_{22} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}) + \alpha_T E * d\theta = 0 \rightarrow \sigma_{22} = \frac{1}{1-\nu}(\nu\sigma_{11} - \alpha_T E * d\theta) = 0$$

gdzie $C * dE = H$

Wytyżenie w tym przypadku obliczone zgodnie z hipotezą H–M–H wynosi

$$\frac{1-2\nu}{1-\nu}\sigma_{11} + \frac{\alpha_T}{1-\nu}E * d\theta \leq \sigma_0$$

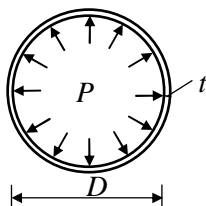
Z wyrażenia tego wyniku, iż o wyężeniu decydować będzie tutaj nie tylko aktualna temperatura, ale również cały proces jej narastania.

ZADANIE 7.6.

Cienkościenny zbiornik kulisty o średnicy D i grubości ścianki t poddany jest ciśnieniu wewnętrznemu P (rys. 7.6a).

Wyznaczyć ciśnienie dopuszczalne wynikające z hipotezy H–M–H.

Dane: $D, t, R, \sigma_0, P_{dop}^{HMH} = ?$

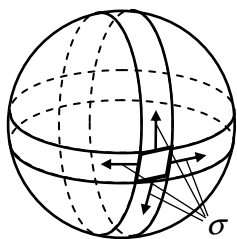


Rys. 7.6a

Rozwiązanie:

W wyniku działania ciśnienia P wewnętrznego kuli w ściankach zbiornika powstanie naprężenie jednakowe w każdym punkcie powłoki i równe σ .

Opasując kulę południkami i równoleżnikami można zauważyć, iż w kierunku południkowym mamy naprężenie σ jak i w kierunku równoleżnikowym (rys. 7.6b). W celu wyznaczenia dopuszczalnego ciśnienia, jakie może zaistnieć w rozpatrywanym zbiorniku kulistym rozetniemy go myślowo w miejscu największego równoleżnika (rys. 7.6c). Układ jest w równowadze statycznej, jeśli w miejscu rozcięcia istnieje równomierne naprężenie rozciągające σ , które równoważyć będzie działanie ciśnienia P na jedną z półkul. Dla ułatwienia rozważań zbierzemy działanie ciśnienia P z jednej półkuli do wypadkowej Q .



Rys. 7.6b

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$